Απειροστικός III – Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Άσκηση 1. *Εξετάστε κατά πόσο τα παρακάτω διανυσματικά πεδία ισούνται με το gradient κάποιας συνάρτησης:*

$$F = (x, y), \qquad F = (x^2 + y^2, 2xy), \qquad F = (\cos xy - xy\sin xy, -x^2 \sin xy),$$
$$F = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2), \qquad F = (4xz - x, -4yz, z - 2y).$$

Άσκηση 2. *Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:*

$$\text{(i)} \quad \int_c F \cdot ds, \qquad F = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2), \qquad c(t) = (\sqrt{t}, t^3, e^{\sqrt{t}}),\ t \in [0, 1].$$
$$\text{(ii)} \quad \int_c F \cdot ds, \qquad F = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y), \qquad c(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4),\ t \in [0, \pi].$$

Άσκηση 3. *Έστω* $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *παραμετρικοποίηση του μοναδιαίου κύκλου. Δείξτε ότι*

$$\int_c -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi.$$

Αποφανθείτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F = (P, Q) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ *δεν είναι συντηρητικό, παρ' όλο που ισχύει* $Q_x = P_y$. *Γιατί συμβαίνει αυτό;*

Άσκηση 4. *Υπολογίστε τα επιφανειακά ολοκληρώματα:*

$$\text{(i)} \quad \int\int_S F \cdot n dS, \qquad S = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 4], \qquad F = (x - y^2, y, x^3),$$
$$\text{(ii)} \quad \int\int_S F \cdot n dS, \qquad S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \qquad F = (3xy^2, 3x^2 y, z^3),$$

όπου n *το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της κάθε επιφάνειας.*

Άσκηση 5. *Έστω* W *απλό χωρίο στον* $\mathbb{R}^3$. *Δείξτε ότι*

$$\int\int_S (x, y, z,) \cdot n dS = 3(\textit{όγκος του } W)$$

Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη φόρμουλα για να υπολογίσετε τον όγκο της μπάλας $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Άσκηση 6. *Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα*

$$\int\int_{\partial W} F \cdot dS,$$

όπου $F = (y, z, xz)$ *και* $W = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ x \geq 0\}$.